به نامِ خدا

مسئله‌ی ۱) جسمی درونِ سیالالی حرکت می‌کند. نیروی مقاومتی که از طرفِ سیال به آن وارد می‌شود به شکلِ $K\,v^4$ است، که K یک ثابت و v اندازه‌ی سرعتِ جسم است. بُعدِ K کدام است؟

الف) $\mathsf{M\,L^{-3}\,T^{2}}$ ب) $\mathsf{M\,T^{-1}}$

ج) $\mathsf{M\,L^{-1}}$ د) $\mathsf{L^{4}\,T^{-4}}$

حلِ مسئله‌ی ۱) بُعدِ K

$$[K] = \frac{[F]}{[v]^4} = \frac{\mathsf{M\,L\,T^{-2}}}{\mathsf{L^4\,T^{-4}}} = \mathsf{M\,L^{-3}\,T^{2}}. \tag{۱}$$

مسئله‌ی ۲) جسمِ سوالِ قبل در همان سیال از حالتِ سکون در راستای گرانش سقوط می‌کند. جرمِ جسم را m و شتابِ گرانش را g بگیرید. بُعدِ شتاب LT^{-2} است. می‌توان نشان داد پس از مدتی سرعتِ ذره تقریباً ثابت می‌شود. به این سرعت، سرعتِ حد گفته می‌شود. سرعتِ مشخصه یا سرعتِ حدِّ جسم هم‌مرتبه با کدام گزینه است؟

الف) $\left(\dfrac{mg}{K}\right)^{1/4}$ ب) $\left(\dfrac{m}{Kg^3}\right)^{1/3}$

ج) $\left(\dfrac{m}{Kg^2}\right)^{1/2}$ د) $\left(\dfrac{m}{Kg^3}\right)^{1/4}$

حلِ مسئله‌ی ۲) باید با کمیت‌های m, g و K کمیتی مثلِ $m^a g^b K^c$ با بُعدِ سرعت بسازیم. پس

$$\mathsf{M}^a\,(\mathsf{LT^{-2}})^b\,(\mathsf{ML^{-3}T^{2}})^c = \mathsf{LT^{-1}}. \tag{۲}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$a + c = 0, \tag{۳}$$

$$b - 3c = 1, \tag{۴}$$

$$-2b + 2c = -1. \tag{۵}$$

با حلِ این معادلات می‌رسیم به

$$a = \frac{1}{4}, \qquad b = \frac{1}{4}, \qquad c = -\frac{1}{4}. \tag{۶}$$

و

$$v_c \propto (\frac{mg}{K})^{1/4}. \qquad (۷)$$

مسئله‌یِ ۳) جرمِ تخمِ شترمرغ بینِ $1\,\mathrm{kg}$ تا $1.5\,\mathrm{kg}$ است، بینِ 25 تا 30 برابرِ جرمِ یک تخمِ مرغ، یعنی حدودِ یک شانه تخمِ مرغ. تخمِ شترمرغ تقریباً مقیاس‌شده‌یِ تخمِ مرغ است. شکلِ را ببینید. ضریبِ

مقیاسِ اندازه‌یِ طولِ مشخصه‌یِ تخمِ شترمرغ نسبت به طولِ مشخصه‌یِ تخمِ مرغ حدوداً چه‌قدر است؟

الف) 3 ب) 9

ج) 27 د) 81

حلِ مسئله‌یِ ۳) جرم متناسب با حجم، بنا بر این متناسب با طولِ مشخصه به توانِ 3 است. پس ضریبِ مقیاس ریشه‌یِ سومِ عددی بین $30 - 25$ است. ضریبِ مقیاسِ اندازه‌یِ طولِ مشخصه‌یِ تخمِ شترمرغ نسبت به طولِ مشخصه‌یِ تخمِ مرغ $\alpha \approx 3$ است.

مسئله‌یِ ۴) جرمِ تخمِ شترمرغ بینِ $1\,\mathrm{kg}$ تا $1.5\,\mathrm{kg}$ است، بینِ 25 تا 30 برابرِ جرمِ یک تخمِ مرغ، یعنی حدودِ یک شانه تخمِ مرغ.

برایِ بررسی‌یِ کمّی‌یِ فرآیندِ پختنِ آن‌ها باید از معادله‌یِ حرارت استفاده کرد.

$$\frac{\partial T(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = D\boldsymbol{\nabla}^2 T(\boldsymbol{r},t).$$

پارامتری که در این معادله وارد می‌شود D با بُعدِ L^2T^{-1} است. حلّ این معادله ساده نیست. پس سعی نکنید آن را حل کنید. با فرضِ این‌که موادِ تشکیل‌دهنده‌یِ تخمِ مرغ و تخمِ شترمرغ مثلِ هم باشد و فقط

اندازه‌یِ یک مقیاس شده دیگری باشد، پارامترِ D برایِ هر دو یکی است. با استفاده از تحلیلِ ابعادی رابطه‌ای بینِ زمانِ پختن، T، مساحتِ تخمِ مرغ S، و پارامترِ D به دست آورید. زمانِ پختنِ تخمِ مرغ را حدودِ $10\,\mathrm{min}$ بگیرید. با استفاده از تحلیلِ ابعادی چه چیزی در موردِ زمانِ تقریبیِ پختنِ تخمِ شترمرغ می‌توانید بگویید؟

الف) $30\,\mathrm{min}$ ب) $90\,\mathrm{min}$

ج) $270\,\mathrm{min}$ د) $10\,\mathrm{min}$

حلِ مسئله‌یِ ۴) با کمیت‌هایِ T، مساحتِ تخمِ مرغ S، و پارامترِ D کمیتِ بی‌بُعدِ $\frac{DS}{T}$ را می‌توانیم بسازیم. چون یک کمیتِ بی‌بُعد داریم باید مقداری ثابت باشد. پس

$$\frac{DS_1}{T_1} = \frac{DS_2}{T_2}, \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{S_2}{S_1}. \tag{۸}$$

اما طولِ مشخصه‌یِ تخمِ شترمرغ نسبت به طولِ مشخصه‌یِ تخمِ مرغ $\alpha \approx 3$ است، پس نسبتِ مساحت‌ها حدوداً 9 است. بنا بر این زمانِ تقریبیِ پختنِ تخمِ شترمرغ حدودِ $90\,\mathrm{min}$ است.

مسئله‌یِ ۵) متخصصینِ پزشکیِ قانونی گاهی لازم است زمانِ مرگِ یک قربانی را تخمین بزنند. فرض کنید که در زمانِ مرگ دمایِ بدن همان دمایِ معمول یعنی ۳۷ درجه باشد. پس از مرگ، جسد سوخت‌وسازی ندارد، و به تدریج با محیطِ اطرافش هم‌دما می‌شود. میزانِ از دست‌دادنِ دمایِ بدن متناسب با سطحِ بدن، S است. انرژیِ گرماییِ بدن متناسب با حجم، V است. دو جسد هستند که متشابهِ هم‌اند، یعنی یکی مقیاس‌شده‌یِ دیگری است. آنکه بلندتر است قدش حدود $h_A = 2\,\mathrm{m}$، و دیگری قدش حدود $h_B = 1.5\,\mathrm{m}$، است. زمانِ سرد شدنِ جسدِ بلندتر T_A و زمانِ سرد شدنِ جسدِ کوتاه‌تر T_B است. $\frac{T_A}{T_B}$

چه‌قدر است؟

الف) $\frac{3}{2}$ ب) $\frac{4}{3}$

ج) $\frac{3}{4}$ د) $\frac{9}{4}$

حلِ مسئله‌یِ ۵) هر چه‌قدر جسد بزرگ‌تر باشد حجم و مساحتش هم بزرگ‌تر است.

$$S \propto \ell^2, \qquad V \propto \ell^3, \tag{۹}$$

که ℓ طولِ مشخصه‌ای در جسد است. گرما را از طریقِ پوست و سطحِ بدن از دست می‌دهد. پس مقدار گرمایی که در واحدِ زمان از دست می‌دهد متناسب با سطح است. مقدار انرژیِ گرماییِ اولیه متناسب با حجم است. پس اگر دو بدن که متشابهِ هم ولی یکی با ضریبِ $\alpha > 1$ مقیاس‌شده‌یِ دیگری باشد، $V_\alpha = \alpha^3 V$ و $S_\alpha = \alpha^2 S$ است. نسبتِ زمانِ مشخصه‌ها

$$\frac{\tau_\alpha}{\tau} = \frac{V_\alpha S}{V S_\alpha} = \alpha. \tag{۱۰}$$

یعنی جسدِ بزرگ‌تر زمانِ مشخصه‌ای α برابر بزرگ‌تر دارد و دیرتر سرد می‌شود. در این‌جا

$$\alpha = \frac{h_A}{h_B} = \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3}. \tag{۱۱}$$

مسئله‌یِ ۶) ذره‌ای به جرمِ m که در ابتدا ساکن است، تحتِ تاثیرِ نیرویِ

$$\mathbf{F}(t) = F_0 \frac{t}{t+\tau}\mathbf{i}$$

قرار می‌گیرد. F_0 و τ ثابت هستند.

الف_ با پارامترهایی که در قانونِ نیوتن ظاهر می‌شوند، یعنی F_0, τ و m یک زمانِ مشخصه، یک سرعتِ مشخصه و یک طولِ مشخصه به دست آورید.

ب_ سرعتِ ذره $v(t)$ را به دست آورید.

راه‌نمایی: در انتگرال‌گیری تغییرِ متغیرِ $u = t + \tau$ ممکن است به دردتان بخورد.

ج_ در زمان‌هایِ اولیه یعنی زمانی که $\epsilon \ll 1$:$=\frac{t}{\tau}$ سرعتِ ذره تقریباً چه‌قدر است؟

راه‌نمایی: بسطِ زیر ممکن است به دردتان بخورد.

$$\frac{1}{1+\epsilon} = 1 - \epsilon + \epsilon^2 - \epsilon^3 + \cdots, \qquad \epsilon \ll 1$$

دـ پس از زمان‌هایِ طولانی یعنی زمانی که $\epsilon \ll 1$:=: $\frac{\tau}{t}$ تابعیتِ سرعتِ ذره نسبت به زمان تقریباً چه‌گونه است؟

حلِ مسئله‌یِ ۶) الفـ با پارامترهایی که در قانونِ نیوتن ظاهر می‌شوند، یعنی F_0, τ و m می توانیم یک زمانِ مشخصه، یک سرعتِ مشخصه و یک طولِ مشخصه به دست آوریم.

$$T_c = \tau, \tag{۱۲}$$

$$v_c = \frac{F_0 \tau}{m}, \tag{۱۳}$$

$$x_c = \frac{F_0 \tau^2}{m}. \tag{۱۴}$$

بـ قانونِ نیوتن برایِ این متحرک عبارت است از

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_0\, \frac{t}{t+\tau}. \tag{۱۵}$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v' = \int_0^t \frac{F_0}{m}\, \frac{t'\,\mathrm{d}t'}{t'+\tau}, \tag{۱۶}$$

که با تغییرِ متغیرِ $u = t + \tau$ تبدیل می‌شود به

$$v = \frac{F_0}{m} \int_\tau^{t+\tau} \mathrm{d}u - \frac{F_0\tau}{m} \int_\tau^{t+\tau} \frac{\mathrm{d}u}{u} \tag{۱۷}$$

$$= \frac{F_0}{m}t - \frac{F_0\tau}{m}\ln(\frac{t+\tau}{\tau}) \tag{۱۸}$$

جـ اگر در زمان‌هایِ اولیه یعنی زمانی که $\epsilon \ll 1$:=: $\frac{t}{\tau}$ می‌توانیم جوابی که در بندِ قبل به دست آوردیم را بسط دهیم.

$$v = \frac{F_0}{m}t - \frac{F_0\tau}{m}\ln(1+\frac{t}{\tau}) \tag{۱۹}$$

$$\approx \frac{F_0 t}{m} - \frac{F_0\tau}{m}(\frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2} + \cdots) \tag{۲۰}$$

$$\approx \frac{F_0\, t^2}{2m\tau} \tag{۲۱}$$

راهِ دیگر استفاده‌یِ مستقیم از قانونِ نیوتن است. در زمان‌هایِ اولیه یعنی زمانی که $\epsilon \ll 1$:=: $\frac{t}{\tau}$ قانونِ نیوتن تیدیل می‌شود به

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_0\, \frac{t}{t+\tau} \approx F_0\, \frac{t}{\tau}. \tag{۲۲}$$

پس در زمان‌هایِ اولیه سرعتِ ذره تقریباً

$$v \approx \frac{F_0\, t^2}{2m\tau}. \tag{۲۳}$$

د- پس از زمان‌هایِ طولانی یعنی زمانی که $\epsilon := \frac{\tau}{t} \ll 1$ تابعیتِ سرعتِ ذره نسبت به زمان تقریباً

$$v \approx \frac{F_0}{m} t - \frac{F_0 \tau}{m} \ln(\frac{t}{\tau}). \tag{۲۴}$$

اما جمله‌یِ اول مهم‌تر است. مثلاً فرض کنید $t = 1000\tau$ باشد. در این‌صورت

$$v = \frac{1000 F_0 \tau}{m} - \frac{F_0 \tau}{m} \ln(1001) \tag{۲۵}$$

$$= \frac{F_0 \tau}{m}(1000 - \ln(1001)) \tag{۲۶}$$

$$\approx \frac{1000 F_0\, \tau}{m} \tag{۲۷}$$

پس

$$v \approx \frac{F_0}{m} t. \tag{۲۸}$$